СЕВЕРО-ВОСТОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Математика

10 класс

Демонстрационный вариант

1. Когда одно из двух целых чисел увеличили в 1996 раз, а другое уменьшили в 96 раз, их сумма не изменилась. Чему может равняться их частное?

   Решение. Пусть первое число равно a, а второе b. Тогда должно выполняться равенство $1996a + \frac{b}{96} = a + b$, из которого находим, что $2016a = b$. Следовательно, их частное равно 2016 или $\frac{1}{2016}$.

   Ответ: 2016 или $\frac{1}{2016}$.

2. По прогнозам аналитиков в следующем году численность экономически активного населения (занятых и безработных) некоторого города увеличится на 4%, а число безработных уменьшится на 9%. Сколько процентов от числа экономически активного населения в следующем году будут составлять безработные, если в этом году их было 5,6%?

   Решение. Пусть x человек – численность населения города первоначально. Тогда $0,08x$ человек – число безработных первоначально. На данный момент численность населения – $1,04x$ человек, а число безработных — $(0,91 \cdot 0,056x)$ человек. $(0,91 \cdot 0,056x \cdot 100) \div 1,04x = 4,9\%$ — процент безработных от общего числа жителей на данный момент.

   Ответ: 4,9%

3. Функция $f(x)$ такова, что для всех натуральных $n > 1$ существует простой делитель p числа n такой, что
$$f(n) = f(\frac{n}{p}) - f(p).$$
   Известно, что $f(1001) = 1$. Чему равно $f(1002)$?

   Решение: Заметим, что для любого простого числа p значение $f(p) = f(1) - f(p)$. Значит $f(p) = \frac{f(1)}{2}$ для любого простого числа. Для простых чисел p и q получим, что либо $f(pq) = f(p) - f(q) = 0$, либо $f(pq) = f(q) - f(p) = 0$. Для трех простых чисел p, q и r получим, что $f(pqr) = f(pq) - f(r) = -f(r) = -\frac{f(1)}{2}$ (порядок простых чисел может быть и другим). Тогда $f(1001) = f(7 \cdot 11 \cdot 13) = -\frac{f(1)}{2} = 1$. Но тогда $f(1002) = f(2 \cdot 3 \cdot 167) = -\frac{f(1)}{2} = 1$.

   Ответ: 1.

4. На прямой отмечено 3025 точек. Середины каждых двух из отмеченных точек покрасили в зеленый, синий или красный цвет. Докажите, что количество покрашенных в один из цветов точек на прямой не менее 2016.

   Решение. Для начала рассмотрим три точки. Очевидно, что для трех точек на прямой середины каждых двух из них есть три различные точки. Рассмотрим крайнюю точку на прямой. Середины между ней и двумя ближайшими к ней точками есть две точки, которые не являются серединами других точек. Если убрать эту крайнюю точку, то количество покрашенных точек уменьшится хотя бы на две. Далее убираем еще одну крайнюю точку. Тогда количество покрашенных точек уменьшится еще хотя бы на две. И так далее пока не останется три точки. Получаем, что покрашенных точек не меньше $3+(n-3)\cdot 2 = 3+2n-6 = 2n-3$, где n — количество отмеченных точек. В случае, если на прямой расположено 3025 точек, то середин отмечено не менее $2 \cdot 3025 - 3 = 6047$. Такое возможно, если все отмеченные точки расположены на одинаковых расстояниях от соседних. Предположим, что точек каждого цвета не более 2015. Тогда их должно быть не более $3 \cdot 2015 = 6045$, а покрашенных точек не менее 6047. Значит, количество покрашенных в один из цветов точек на прямой не менее 2016.

5. Решить уравнение:
$$x + \frac{7}{x} = [x] + \frac{7}{[x]},$$
где $x = [x] + \{x\}$.

Решение. После эквивалентных преобразований придем к уравнению
$$(x - [x])(1 - \frac{7}{x[x]}) = 0,$$
что равносильно совокупности уравнений $x - [x] = 0$ и $[x] = \frac{7}{x}$. Решением первого уравнения будут все отличные от нуля целые числа. Во втором уравнении целую часть числа выразим как $[x] = x - \{x\}$, откуда $\{x\} = x - \frac{7}{x}$, из которого следует, что $0 < x - \frac{7}{x} < 1$ при $[x] \neq 0$. Решениями двойного неравенства являются $x \in [-\sqrt{7}; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup [\sqrt{7}; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$, и, следовательно, $[x] \in \{-3; 2; 3\}$. Теперь из уравнения $[x] = \frac{7}{x}$ находим $x = -\frac{7}{3}$; $x = \frac{7}{2}$; $x = \frac{7}{3}$. Из полученных значений x выберем те, которые принадлежат промежуткам $[-\sqrt{7}; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup [\sqrt{7}; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$. Значит $x = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $x \in Z$ и $x = -\frac{7}{3}$.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ окружность описанная около треугольника COD (O – точка пересечения диагоналей) проходит через центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

Решение. Пусть O_1 – центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Из

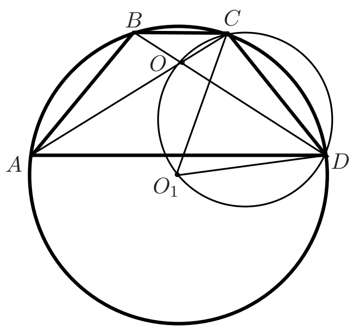

Рис. 1:

условия следует, что $\angle COD = \angle CO_1D = \smile CD$. С другой стороны, $\angle COD = \dfrac{\smile AB + \smile CD}{2}$. Из двух равенств получаем, что $\smile AB = \smile CD$. Следовательно $BC || AD$, что и требовалось доказать.

7. Существуют ли 2016 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 16 простых чисел?

Решение. Введем функцию $S(n)$, равную количеству простых чисел от n до $n+2015$. Заметим, что $S(n)$ отличается от $S(n+1)$ не более, чем на 1, $S(2017!+2)=0$, $S(1)>16$ $(2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,51,53, ...$ - простые числа). Следовательно, существует число m такое, что $S(m)=16$. Т.е. среди чисел от m до $m+2015$ ровно 16 простых чисел.

Ответ: Да, существуют.