

СЕВЕРО-ВОСТОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Математика

11 класс

Демонстрационный вариант

1. Когда одно из двух целых чисел увеличили в 1996 раз, а другое уменьшили в 96 раз, их сумма не изменилась. Чему может равняться их частное?

Решение. Пусть первое число равно a , а второе b . Тогда должно выполняться равенство $1996a + \frac{b}{96} = a + b$, из которого находим, что $2016a = b$. Следовательно, их частное равно 2016 или $\frac{1}{2016}$.

Ответ: 2016 или $\frac{1}{2016}$.

2. По прогнозам аналитиков в следующем году численность экономически активного населения (занятых и безработных) некоторого города увеличится на 4%, а число безработных уменьшится на 9%. Сколько процентов от числа экономически активного населения в следующем году будут составлять безработные, если в этом году их было 5,6%?

Решение. Пусть x человек – численность населения города первоначально. Тогда $0,08x$ человек – число безработных первоначально. На данный момент численность населения – $1,04x$ человек, а число безработных – $(0,91 \cdot 0,056x)$ человек. $(0,91 \cdot 0,056x \cdot 100) \div 1,04x = 4,9\%$ – процент безработных от общего числа жителей на данный момент.

Ответ: 4,9%

3. Решите неравенство

$$\log_{3+\sin x - \cos x} \left(3 - \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \right) \geq e^{\sqrt{x}}$$

Решение. Учитывая, что $\cos x + \sin x \neq 0$ и $3 + \sin x - \cos x > 1$;

$$\begin{aligned} \log_{3+\sin x - \cos x} \left(3 - \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \right) &= \log_{3+\sin x - \cos x} \left(3 - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} \right) = \\ &= \log_{3+\sin x - \cos x} \left(3 - \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} \right) = \\ &= \log_{3+\sin x - \cos x} (3 + \sin x - \cos x) = 1. \end{aligned}$$

Получим неравенство $1 \geq e^{\sqrt{x}}$. Следовательно, $x = 0$.

Ответ: 0

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна стороне основания. На боковых ребрах SD и SB пирамиды отмечены точки M и N соответственно так, что прямые AM и CN взаимно перпендикулярны. Докажите, что

$$2SA(SM + SN) = SA^2 + SM \cdot SN.$$

Решение. Систему координат расположим так, что начало координат совпадает с вершиной A , а оси, как показано на рисунке 1.

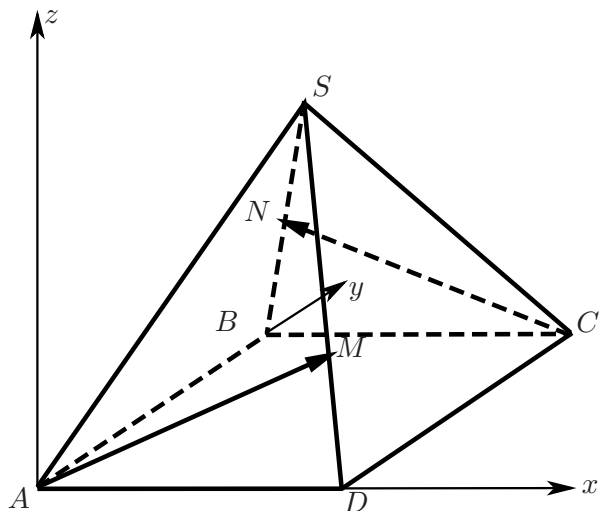


Рис. 1:

Будем считать, что длина стороны основания пирамиды равна 2. Тогда $\vec{AB}\{0, 2, 0\}$, $\vec{AC}\{2, 2, 0\}$, $\vec{AD}\{2, 0, 0\}$, $\vec{AS}\{1, 1, 2\}$, $\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = \{-2, 0, 0\}$, $\vec{CS} = \vec{AS} - \vec{AC} = \{-1, -1, 2\}$, $\vec{SB} = \vec{AB} - \vec{AS} = \{-1, 1, -2\}$, $\vec{SD} = \vec{AD} - \vec{AS} = \{1, -1, -2\}$.

Выразим векторы \vec{AM} и \vec{CN} через \vec{SA} , \vec{SM} и \vec{SN} :

$$\begin{aligned}\vec{SN} &= \frac{SN}{SB} \cdot \vec{SB} = \frac{SN}{SA} \cdot \vec{SB}, & \vec{SN} &\left\{ -\frac{SN}{SA}, \frac{SN}{SA}, -2 \cdot \frac{SN}{SA} \right\}, \\ \vec{SM} &= \frac{SM}{SD} \cdot \vec{SD} = \frac{SM}{SA} \cdot \vec{SD}, & \vec{SM} &\left\{ \frac{SM}{SA}, -\frac{SM}{SA}, -2 \cdot \frac{SM}{SA} \right\}, \\ \vec{AM} &= \vec{AS} + \vec{SM} = \left\{ \frac{SA + SM}{SA}, \frac{SA - SM}{SA}, 2 \cdot \frac{SA - SM}{SA} \right\}, \\ \vec{CN} &= \vec{CS} + \vec{SN} = \left\{ -\frac{SA + SN}{SA}, -\frac{SA - SN}{SA}, 2 \cdot \frac{SA - SN}{SA} \right\}.\end{aligned}$$

Найдем скалярное произведение векторов \vec{AM} и \vec{CN} :

$$(\vec{AM}, \vec{CN}) = -\frac{(SA + SM)(SA + SN)}{SA^2} - \frac{(SA - SM)(SA - SN)}{SA^2} + 4 \cdot \frac{(SA - SM)(SA - SN)}{SA^2}.$$

Для перпендикулярности прямых AM и CN необходимо, чтобы скалярное произведение векторов \vec{AM} и \vec{CN} равнялось нулю. Приравняв полученное выражение нулю и проделав необходимые преобразования получим требуемое равенство.

5. Решить уравнение при всех значениях параметра a

$$3x^2 + 2ax - a^2 = \ln \frac{x - a}{2x}.$$

Решение: Если $a = 0$, то уравнение примет вид $3x^2 = \ln \frac{1}{2}$, которое не имеет решений. Если $a \neq 0$, то x не принадлежит отрезку $[0, a]$ или $[a, 0]$ в зависимости от знака параметра a , т.к. иначе натуральный логарифм не существует. Преобразуем уравнение к виду:

$$4x^2 + \ln |2x| = (x - a)^2 + \ln |x - a|. \quad (*)$$

Пусть $f(t) = |t|^2 + \ln |t|$. Тогда (*) примет вид $f(2x) = f(x-a)$. Заметим, что $f(t)$ четная и строго возрастающая при $t \geq 0$ функция (т.к. является суммой двух возрастающих при $t \geq 0$ функций). Значит, $f(2x) = f(x-a)$ только, если $2x = x-a$ или $-2x = x-a$. Следовательно, $x = -a$ или $x = \frac{a}{3}$. Но точка $x = \frac{a}{3}$ лежит между a и 0 , поэтому $x = -a$ единственное решение уравнения.

Ответ: При $a = 0$ решений нет. При $a \neq 0$ единственное решение $x = -a$.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ окружность описанная около треугольника COD (O – точка пересечения диагоналей) проходит через центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

Решение. Пусть O_1 – центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Из

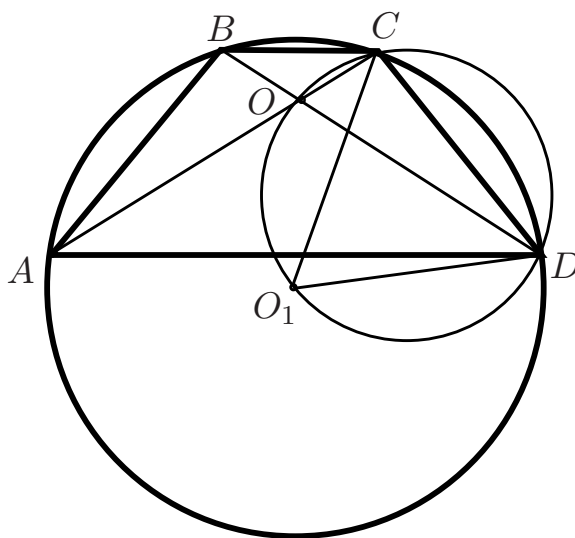


Рис. 2:

условия следует, что $\angle COD = \angle CO_1D = \sphericalangle CD$. С другой стороны, $\angle COD = \frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle CD}{2}$. Из двух равенств получаем, что $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$. Следовательно $BC \parallel AD$, что и требовалось доказать.

7. Существуют ли 2016 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 16 простых чисел?

Решение. Введем функцию $S(n)$, равную количеству простых чисел от n до $n + 2015$. Заметим, что $S(n)$ отличается от $S(n+1)$ не более, чем на 1, $S(2017! + 2) = 0$, $S(1) > 16$ (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, ... - простые числа). Следовательно, существует число m такое, что $S(m) = 16$. Т.е. среди чисел от m до $m + 2015$ ровно 16 простых чисел.

Ответ: Да, существуют.