СЕВЕРО-ВОСТОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Математика

8 класс

Демонстрационный вариант

1. Найдите наибольшее натуральное число, состоящее из различных цифр, такое, что произведение цифр этого числа равно 2016.

2. Отличник Вася решает каждый день ровно 1 задачу по алгебре и 11 задач по геометрии, или 3 задачи по алгебре и 8 задач по геометрии, или 15 задач по алгебре и ни одной задачи по геометрии. За некоторое время Вася решил 100 задач по алгебре. Мог ли он за это время решить 144 задачи по геометрии?

3. На доске написаны 10 последовательных натуральных чисел. Какое наибольшее количество из них может иметь сумму цифр, равное полному квадрату?

4. В круг с радиусом 2 помещен выпуклый многоугольник площади 7. Докажите, что он содержит центр окружности.

5. У правильного 2015-угольника отмечены 64 вершины. Доказать, что среди них существуют четыре точки, являющиеся вершинами некоторой трапеции.

Решение

1. **Ответ:** 876321. Разложим число 2016 на множители. $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Чтобы число было максимальным, нужно чтобы оно содержало наибольшее количество цифр. Заметим, что в искомом числе должна быть 1. Следовательно, это число должно состоять из цифр $1, 2, 3, 6, 7, 8$.

2. **Ответ:** Нет. Заметим, что количество решенных задач по геометрии в один день отличается от количества решенных задач по алгебре на число кратное 5. Следовательно, общее число решенных задач по геометрии должно отличаться от общего количества решенных задач задач по алгебре на число кратное 5. Но $144 - 100 = 44$ не делится на 5.

3. **Ответ:** 4. Заметим, что суммы цифр последовательных натуральных чисел в одной десятке являются последовательными натуральными числами. Так как чисел 10, то они лежат в двух десятках. Также заметим, что среди десяти последовательных натуральных чисел может быть не более 3 полных квадратов, причем, три полных квадрата может быть только в случае если чисел 9. Следовательно, среди написанных на доске 10 последовательных натуральных чисел не может быть более 4 чисел с суммой цифр, равной квадрату натурального числа. Покажем пример когда их ровно 4 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

4. **Ответ:** Пусть многоугольник не содержит центр окружности. Тогда существует диаметр окружности который не пересекается с данным многоугольником, т.к. многоугольник выпуклый. Т.е. этот многоугольник полностью лежит внутри полукруга. Посчитаем площадь полукруга $\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi < 7$. Противоречие.

5. **Ответ:** Для начала докажем, что каждая диагональ параллельна какой-либо стороне многоугольника. Пусть $A_1A_2A_3...A_{2015}$ данный 2015-угольник. Каждая диагональ $A_iA_j||A_{i+1}A_{j-1}||A_{i+2}A_{j-2}||...$ и т.д. пока не дойдем до стороны многоугольника (можно считать что $i < j$ и что они разной четности, т.к. можно обозначить вершины, начиная с любой вершины). А количество отрезков на концах в отмеченных 64 точках равно $\frac{64 \cdot 63}{2} = 2016$. По принципу Дирихле найдутся два параллельных отрезка, концы которых будут вершинами трапеции. Заметим, что параллелограмма быть не может т.к. в этом случае количество вершин данного многоугольника должно было быть четным.