СЕВЕРО-ВОСТОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Математика

9 класс

Демонстрационный вариант

1. а) Найдутся ли 10 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016;
   б) Найдутся ли 7 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016.

2. Действительные числа a и b таковы, что $\dfrac{6a+9b}{a+b} < \dfrac{4a-b}{a-b}$. Докажите, что $|b| < |a| < 2|b|$.

3. Коэффициенты квадратных трехчленов: $f_i(x) = x^2 + b_i x + c_i$, удовлетворяют равенствам $\dfrac{b_{i+1}}{b_i} = 2$, $c_i = -32 \cdot b_i - 1024$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Известно, что корнями многочлена $f_1(x)$ являются числа 32 и -31. а) Найдите корни квадратного трехчлена f_{12}; б) найдите корни квадратного трехчлена f_i.

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $(BC||AD)$ углы ABD и DBC равны $135°$ и $15°$ соответственно, $BD = \sqrt{6}$. Найдите периметр трапеции.

5. В ячейках таблицы 9×9 вписаны нечетные целые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторой строки или некоторого столбца. Доказать, что при помощи нескольких таких операций можно прийти к таблице, у которой суммы чисел любой строки и любого столбца будут положительны.

Решения

1. **Ответ:** а)Нет; б) Да.

   а) Предположим, что $a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+9) = 10a + 45 = 2016 \Leftrightarrow 10a = 1971$. Так как последнее равенство невозможно для натуральных a, ответ – "нет".

   б)285+286+287+288+289+290+291=2016.

2. $$\frac{6a+9b}{a+b} < \frac{4a-b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{6a+9b}{a+b} - \frac{4a-b}{a-b} < 0 \Leftrightarrow \frac{2a^2-8b^2}{a^2-b^2} < 0$$

   Решая последнее неравенство относительно a^2 получаем $b^2 < a^2 < 4b^2$, что равносильно неравенствам $|b| < |a| < 2|b|$. Что и требовалось доказать.

3. **Ответ:** 2016; 32.

   По теореме Виета: $b_1 = -(32 + (-31)) = -1$, $c_1 = -32 \cdot (-1) - 1024 = 32 - 1024 = -992$. Следовательно, $b_i = -2^{i-1}$, $c_i = -32 \cdot (-2^{i-1}) - 1024 = 2^{i+4} - 2^{10}$.

   Решая квадратное уравнение

   $$x^2 - 2^{i-1}x + 2^{i+4} - 2^{10} = 0$$

   находим:

   $D = \left(2^{i-1}\right)^2 - 4\left(2^{i+4} - 2^{10}\right) = \left(2^{i-1}\right)^2 - 2 \cdot 2^{i-1} \cdot 2^6 + 2^{12} = \left(2^{i-1} - 2^6\right)^2, \sqrt{D} = |2^{i-1} - 2^6|$.

б) При $i > 6$ $x_1 = \dfrac{2^{i-1} + 2^{i-1} - 2^6}{2} = 2^{i-1} - 2^5, x_2 = \dfrac{2^{i-1} - 2^{i-1} + 2^6}{2} = 2^5.$

При $i \leq 6$ $x_1 = \dfrac{2^{i-1} - 2^{i-1} + 2^6}{2} = 2^5, x_2 = \dfrac{2^{i-1} + 2^{i-1} - 2^6}{2} = 2^{i-1} - 2^5.$

а) При $i = 12$ получаем

$$x_1 = 2016, x_2 = 32.$$

4. **Ответ:** $9 - \sqrt{3}$.

Заметим, что $\angle DBC = \angle ACB = \angle BDA = \angle CAD = 15^\circ$, $\angle BAD = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ - \angle DBC = 15^\circ$, поэтому AC – биссектриса угла A.

Так как $\angle BAC = \angle CAB = \angle CDB = 15^\circ$, то треугольники ABC и BCD равнобедренные и $AB = BC = CD$. По теореме синусов для треугольника ABD: $\dfrac{BD}{\sin 30^\circ} = \dfrac{AD}{\sin 135^\circ}$,

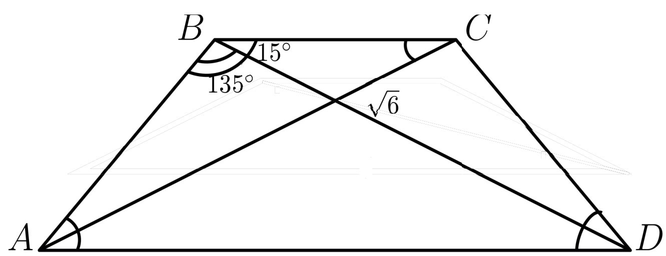

Рис. 1:

откуда

$$AD = 2\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов для этого же треугольника:

$$AB^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot AB \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - 6AB + 6 = 0.$$

Из последнего уравнения находим $AB = 3 - \sqrt{3}$ (второй корень не подходит по смыслу, так как напротив большего угла должна лежать большая сторона). И наконец:

$$AB + BC + CD + AD = 3 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9 - \sqrt{3}.$$

5. Так как сумма нечетного числа нечетных чисел нечетно, то сумма чисел любой строки (любого столбца) получающихся таблиц не может равняться нулю (т.е. строго положительна или строго отрицательна). Далее, заметим, что сумма всех чисел таблицы, получающаяся при помощи таких операций не превосходит суммы модулей всех чисел первоначальной таблицы. Следовательно, среди всевозможных таблиц, получающихся из первоначальной при помощи данной операции (а таких таблиц конечное число, не превосходящее 2^{100}), существуют таблицы с наибольшей возможной суммой всех чисел. У такой таблицы суммы чисел любой строки и любого столбца будут положительны. Действительно, если бы сумма чисел какого-нибудь столбца (или строки) была отрицательной, то поменяв знаки всех чисел этой строки (или столбца) мы бы получили таблицу с большей суммой всех чисел.